UNIVERSITATEA BABEŞ–BOLYAI CLUJ-NAPOCA
FACULTATEA DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ

Habilitation Thesis

Mathematics

presented by

Adriana Buică

Periodic solutions of differential systems: existence, stability and bifurcations

---

Cluj-Napoca, 2014

Preface

This habilitation thesis is a survey of results on the subject of periodic solutions for differential systems that we developed in the last years. The thesis contains an Abstract in English followed by its version in Romanian, four Chapters that contains the survey of the recent results, a fifth Chapter with plans and ideas for further work, and a list of References.

The work for these results was mainly undertaken in Universitatea Babeş–Bolyai, Cluj-Napoca, Romania, but also during research stays in Universitat Autònoma de Barcelona, Universidad de Granada, Universitat de Lleida, all in Spain, and in Imperial College London, Great Britain. I acknowledge financial support through research grants from all these universities. I acknowledge also financial support for an eighteen months research stay in Barcelona from Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (Madrid) and for another ten months research stay in Barcelona from Agence universitaire de la francophonie.

During these years I met many people who helped me in developing this work and to whom I am very grateful. So I thank to all my colleagues and friends from my home university and also from the other universities that I visited. It is not possible to mention all of them here. I will name only my PhD thesis supervisor, Prof. dr. Ioan A. Rus, and my co-authors for the results presented in this thesis Maite Grau, Isaac García, Susanna Maza, Jaume Giné, Jaume Llibre, Oleg Makarenkov, Rafael Ortega, Aris Daniilidis, Jean-Pierre Françoise.

Cluj–Napoca, February 4, 2014 Adriana Buică

Abstract. This habilitation thesis is a research contribution on the Qualitative theory of differential equations, focusing on the study of periodic solutions. The main results presented here conclude the existence and stability of isolated periodic solutions or the existence of continua of periodic solutions. In general, the results work for differential systems of arbitrary dimension, but there are specific situations where the dimension is fixed (2, 3 or 4). With respect to the smoothness of the system, sometimes it is assumed only continuity, other times Lipschitz continuity without C^1 differentiability. Other results are given for analytic or even polynomial systems. In most of the cases, the object studied is a family of systems depending on a small parameter, denoted ε. The system obtained for $\varepsilon = 0$ is called the unperturbed system, while a system with some fixed $\varepsilon \neq 0$ is called a perturbed one. For these cases we study the general *problem of persistence of periodic solutions*, which have different specific formulations in this thesis. Now we describe shortly these variants.

In Chapter 1 we assume that the unperturbed system has an isolated equilibrium (hence trivial periodic orbit) and we say that *it persists as a T–periodic solution* when *any* perturbed forced T–periodic system (belonging to some class) which is arbitrarily close to the unperturbed one, has a T–periodic solution. In a paragraph of Chapter 2 we are concerned in finding the *cyclicity* of a Hopf equilibrium of a 3–dimensional system (Hopf means that it has two pure imaginary eigenvalues and another one real nonnull). The difference between the problems considered here and in Chapter 1, is that here we study *how many* periodic orbits emanates from the equilibrium. We are not interested whether each perturbed system has a periodic orbit emanating from the equilibrium, but on establishing the maximum number of periodic orbits emanating from the equilibrium that can eventually be achieved with some perturbation. This number is the cyclicity. The formal difference is that in Chapter 2 the perturbed system is autonomous. In Chapters 3 and 4 the unperturbed system has a continuum of periodic orbits. Fixing the perturbation, the problem is to decide which of the periodic orbits persists in the perturbed system. The instrument to achieve this is the *bifurcation function.*

Another important feature of a differential system is to have a continuum of periodic solutions. In planar systems there exists equilibria which are called *centers* because they have an entire neighborhood filled with closed orbits. For nonlinear systems, even if they are analytic, the problem to decide whether an equilibrium is a center or not is a difficult one. This problem is called the *center problem.* In higher dimensions the center problem can be formulated, for example, for systems

that have an invariant 2–dimensional manifold near an equilibrium. In this case the problem is to decide whether the equilibrium is a center for the restriction of the system to this manifold. In Chapter 2 we studied also the center problem for Hopf points in $\mathbb{R}^3$.

Now we briefly describe few of the main results of this thesis.

In Chapter 1 we gave both necessary and sufficient conditions for persistence of an equilibrium as a periodic solution in arbitrary dimensions. In the search of these conditions we found connections with several topological notions such as topological degree and diffeotopy. In dimension 2 we gave a characterization of persistence.

Chapter 2 exploits the properties of an inverse Jacobi multiplier of an autonomous system in $\mathbb{R}^3$ which exists in a neighborhood of a Hopf singular point. It emerged to be a useful tool to solve the center problem in this case. In this way, we gave a new solution to this problem, analogous to the well–known one given by Lyapunov in terms of a first integral. When the singular point is not a center, but a saddle–focus, we found that its cyclicity can be calculated knowing the vanishing multiplicity of some (in fact, any) inverse Jacobi multiplier.

The systems studied in Chapter 3 are sufficiently smooth. Here one can find the expressions of the first order (also named Malkin function) and the second order bifurcation functions for the study of persistence of periodic solutions that belong to a period manifold. There are also applications.

In Chapter 4 we do not assume C^1 differentiability for the perturbed system. Here one can find weaker smoothness assumptions on which the Malkin function is still a bifurcation function. We study also the stability of a periodic solution of a perturbed system whose corresponding unperturbed one is the trivial system $x' = 0$, such generalizing the classical result of Bogoliubov. Applications are given.

In Chapter 5 we present few ideas for further work. Mainly, the plan is to continue the study of periodic solutions, exploring new types of systems, such as singularly perturbed, impulsive or with random perturbations. We would be interested also on finding new and relevant applications.

Rezumat. Această teză de abilitare prezintă cercetări în cadrul Teoriei calitative a ecuaţiilor diferenţiale, în special studiul soluţiilor periodice. Rezultatele principale conţinute în această teză concluzionează existenţa şi stabilitatea soluţiilor periodice izolate, sau existenţa unui continuum de soluţii periodice. În general, rezultatele sunt date pentru sisteme diferenţiale de dimensiune arbitrară, dar există anumite situaţii specifice, unde dimensiunea este fixată (2, 3 sau 4). În ceea ce priveşte netezimea sistemului, uneori se presupune doar continuitate, alteori Lipschitz continuitate, dar fără să fie de clasă C^1. Alte rezultate sunt date pentru sisteme analitice sau chiar polinomiale. În majoritatea cazurilor, obiectul studiat este o familie de sisteme ce depinde de un parametru mic, notat ε. Sistemul cu $\varepsilon = 0$ se numeşte neperturbat, iar un sistem cu un $\varepsilon \neq 0$ fixat se numeşte perturbat. În aceste cazuri se studiază problema generală a *persistenţei soluţiilor periodice*, care are diferite formulări specifice în această teză. Vom descrie pe scurt aceste variante.

În Capitolul 1 se presupune ca sistemul neperturbat are un punct de echilibru izolat (poate fi privit ca o orbită periodică trivială) şi se spune că *persistă ca solutţie T–periodică* atunci când *orice* sistem perturbat forţat T–periodic (dintr-o anumită clasă), care este oricât de aproape de sistemul neperturbat, are o soluţie T–periodică. Într-un paragraf al Capitolului 2 interesul este acela de a găsi *ciclicitatea* punctului de echilibru Hopf al unui sistem 3–dimensional (Hopf, adică valorile proprii corespunzătoare sunt două pur imaginare şi una reală nenulă). Diferenţa între această problemă şi aceea considerată în Capitolul 1 este aceea că aici se studiază *câte* orbite periodice emană din punctul de echilibru. Nu contează aici dacă fiecare sistem perturbat are o orbită periodică ce emană din punctul de echilibru, dar e important de stabilit numărul maxim de orbite periodice izolate ce emană din punctul de echilibru care până la urmă să fie atins într-unul dintre sistemele perturbate. Acest număr este ciclicitatea. O altă diferenţă este că, în Capitolul 2 sistemul perturbat este autonom.

În Capitolele 3 şi 4 sistemul neperturbat are un continuum de soluţii periodice. Fixând perturbaţia, se consideră problema de a decide care dintre aceste orbite periodice persistă în sistemul perturbat. Instrumentul găsit pentru a realiza acest obiectiv este *funcţia de bifurcaţie.*

O altă calitate importantă a sistemelor diferenţiale este aceea de a avea un continuum de soluţii periodice. Există puncte de echilibru are sistemelor planare care se numesc *centre* deoarece ele au o vecinătate ce conţine doar orbite închise. Pentru sistemele neliniare, chiar dacă ar fi analitice, este foarte dificilă problema de a decide

dacă un punct de echilibru este sau nu de tip centru. Această problemă se numeşte *problema centrului*. În dimensiuni mai mari problema centrului poate fi formulată, de exemplu, pentru sisteme care au o varietate invariantă 2–dimensională lângă un punct de echilibru. În acest caz problema este de a decide dacă punctul de echilibru este centru pentru restricţia sistemului la această varietate. În Capitolul 2 se studiază de asemenea problema centrului în jurul unui punct singular de tip Hopf.

Vom descrie acum câteva dintre rezultatele principale ale tezei.

În Capitolul 1 se dau atât condiţii necesare cât şi suficiente pentru persistenţa unui punct de echilibru ca soluţie periodică, în dimensiune arbitrară. Intervin câteva noţiuni topologice, ca, de exemplu, gradul topologic şi difeotopia. În dimensiune 2 se dă o caracterizare a persistenţei.

Capitolul 2 exploatează proprietăţile unui multiplicator Jacobi corespunzător unui sistem autonom în $\mathbb{R}^3$, care există într-o vecinătate a unui punct singular de tip Hopf. S-a dovedit util în rezolvarea problemei centrului în acest caz. Astfel, am dat o nouă soluţie acestei probleme, analoagă celei binecunoscute dată de Lyapunov în termenii unei integrale prime. În situaţia în care punctul singular este de tip şa–focar, am arătat că multiplicitatea de anulare a unui (de fapt, a oricărui) multiplicator Jacobi poate fi folosită pentru a calcula ciclicitatea punctului.

Sistemele studiate în Capitolul 3 sunt suficient de netede. Aici se pot găsi expresiile funcţiilor de bifurcaţie atât de ordinul întâi (numită şi funcţia lui Malkin), cât şi de ordinul doi, pentru studiul persistenţei soluţiilor periodice ce fac parte dintr-un continuum. Acest capitol conţine şi aplicaţii.

În Capitolul 4 nu se presupune diferenţiabilitate C^1 pentru sistemul perturbat. Aici se pot găsi condiţii de netezime mai slabe, încât funcţia lui Malkin încă să aibă calitatea de funcţie de bifurcaţie. Se studiază de asemenea stabilitatea soluţiei periodice a unui sistem perturbat căruia îi corespunde sistemul neperturbat trivial $x' = 0$, generalizând astfel rezultatul clasic al lui Bogoliubov. Sunt date şi aplicaţii.

În Capitolul 5 se prezintă noi idei pentru viitoarea muncă de cercetare. În principal, planul este să se continue studiul soluţiilor periodice, explorând noi tipuri de sisteme, ca de exemplu, sistemele perturbate singular, sistemele cu impulsuri sau cele cu perturbaţii aleatoare. Vom fi interesaţi de asemenea în a obţine noi aplicaţii.